УДК 519.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ МЯГКОЙ СЕТЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

И.Б. Бадриев, В.В. Бандеров, О.А. Задворнов

Аннотация

Рассматривается пространственная задача о равновесном состоянии мягкой сетчатой оболочки при наличии точечного источника. Предполагается, что функции, описывающие физические соотношения в нитях, образующих оболочку, являются непрерывными, неубывающими и имеют линейный рост на бесконечности. Сформулирована обобщенная задача в виде интегрального тождества и установлена ее разрешимость.

Ключевые слова: мягкая сетчатая оболочка, точечный источник, монотонный оператор, теорема существования.

Введение

В работе рассматривается пространственная задача о равновесном состоянии мягкой сетчатой оболочки при наличии точечного источника. Под сетчатой понимается оболочка, силовой основой которой является сетка, образованная двумя семействами взаимно перекрещивающихся, абсолютно гибких, упругих нитей. Предполагается, что функции, описывающие физические соотношения в нитях, являются непрерывными, неубывающими и имеют линейный рост на бесконечности. Задачи об определении положения равновесия мягкой сетчатой оболочки рассматривались и ранее (см., например, [1]). При этом обобщенные задачи формулировались в виде уравнений или вариационных неравенств с оператором, действующим в случае линейного роста функций, описывающих физические соотношения в нитях, из соболевского пространства $V = [\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}]^3$ в сопряженное с ним, и соответственно рассматривалась ситуация, когда функция, описывающая плотность внешних источников, определяет линейный непрерывный функционал на V.

В настоящей работе проводится исследование задач теории мягких сетчатых оболочек с менее гладкой правой частью: в неодномерном случае дельта-функция Дирака, моделирующая точечный источник, не принадлежит пространству, сопряженному с V. Обойти указанную выше трудность удалось благодаря аддитивному выделению особенности, связанной с дельта-функцией.

Обобщенная постановка задачи сформулирована в виде интегрального тождества относительно функции из $[\overset{\circ}{W}{}_1^{(1)}]^3$. Затем введена вспомогательная задача с правой частью, задаваемой дельта-функцией. Для вспомогательной задачи известно решение в явном виде. Благодаря этому обобщенная постановка свелась к‘нахождению решения операторного уравнения в V. Установлены свойства оператора, входящего в это уравнение: ограниченность, непрерывность, монотонность, коэрцитивность, что дало возможность применить для доказательства теоремы существования известные результаты теории монотонных операторов (см., например, [2, 3]). Доказано, что множество решений обобщенной задачи непусто, выпукло и замкнуто. Вообще говоря, решение обобщенной задачи неединственно. Однако установлено, что усилия в нитях определяются однозначно.

Отметим, что аналогичный подход был использован при рассмотрении стационарных задач фильтрации несжимаемой жидкости, следующей закону фильтрации с предельным градиентом, при наличии точечного источника (см. [4, 5]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим пространственную задачу о равновесном состоянии мягкой сетчатой оболочки при наличии точечного источника. Предполагается, что узлы сети фиксированы, материал, заполняющий промежутки между нитями, не сопротивляется деформации и ни в начальном состоянии, ни в процессе деформации соседние нити не соприкасаются. Ячейки сети считаются малыми и не сопротивляющимися сдвиговым деформациям. Деформации и перемещения допускаются конечными.

Введем в пространстве декартову систему координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Считаем, что в недеформированном состоянии оболочка может быть описана поверхностью

$$\xi(\alpha) = (\xi_1(\alpha), \xi_2(\alpha), \xi_3(\alpha)),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega$ – лагранжевы координаты, Ω – ограниченная область из R^2 с непрерывной по Липшицу границей Γ; предполагаем, что функция ξ удовлетворяет условиям:

$$\xi \in \Big[C_1(\overline{\Omega})\Big]^3, \quad \big|\,\big[\partial_1\xi(\alpha), \partial_2\xi(\alpha)\big]\,\big| \geq c > 0 \quad \forall\, \alpha \in \overline{\Omega}.$$

Лагранжевы координаты $(\alpha^1,\ \alpha^2)$ выберем так, что координатные линии сонаправлены с нитями, образующими оболочку.

Через $w(\alpha) = (w_1(\alpha), w_2(\alpha), w_3(\alpha))$ обозначим функцию, описывающую поверхность оболочки в деформированном состоянии, $G(\alpha) = \big|\,\big[\partial_1 w(\alpha), \partial_2 w(\alpha)\big]\,\big|^2$ – дискриминант метрического тензора поверхности деформированной оболочки.

Здесь использованы обозначения: $\partial_j = \partial/\partial\alpha_j$, $j = 1, 2$, $[\cdot,\cdot]$, $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ – векторное, скалярное произведения и норма в R^3 соответственно.

Введем также следующие обозначения (для $j = 1, 2$): $j^* = 3 - j$; $r_j = \partial_j w$ – вектора, образующие ковариантный локальный базис на деформированной поверхности; $g_j = |\,\partial_j \xi\,|$, $G_j = |\,\partial_j w\,|$ – параметры Ляме недеформированной и деформированной поверхностей оболочки соответственно; r^1, r^2 – вектора, образующие контрвариантный локальный базис на деформированной поверхности: $(r_j,\ r^m) = \delta_{j\,m}$.

Обозначим через F^j внутреннюю силу, действующую на единицу длины α^{j^*}-й координатной линии ($\alpha^j = \mathrm{const}$) деформированной оболочки с той стороны оболочки, куда направлен вектор r^j, $j = 1, 2$, через $F^{j\,m}$ – коэффициенты разложения этой плотности сил по единичным векторам локального базиса:

$$\mathrm{F}^j = \sum_{m=1}^{2} \frac{F^{j\,m}}{G_m}\ r_m\,.$$

Тогда ковариантные компоненты тензора напряжений

$$\mathrm{T} = \sum_{j,m=1}^{2} T^{j\,m} r_j\, r_m$$

связаны с погонными усилиями $F^{j\,m}$ соотношениями $\sqrt{G}\,T^{j\,m} = F^{j\,m}\,G_{j^*}/G_m$ (см. [6, с. 50]).

Для сетчатой оболочки в силу того, что в выбранной лагранжевой системе координат направления осей совпадают с направлениями нитей, имеем (см. [7]): $F^{12} = F^{21} = 0$ (то есть ячейка сети не оказывает сопротивления повороту нитей в узлах скрепления), $F^{jj} = b_j(\lambda_j)\,\rho_j\, g_{j^*}/G_{j^*}$, где $\lambda_j = G_j/g_j$ – относительные степени удлинения.

Здесь $b_1, b_2 : R_+ \to R_+$ – функции, характеризующие физические свойства нитей, $\rho_j : \Omega \to R_+$ – количество нитей, сонаправленных с α^j-й координатной осью, на единицу длины α^{j^*}-й координатной оси в недеформированном состоянии. Эти функции определены конструкцией сетчатой оболочки, и относительно них считаем выполненными условия:

$$b_j \in C(R_+), \tag{1}$$

$$b_j(\zeta) = 0 \quad \text{при } \zeta \le 1 \tag{2}$$

(то есть нити не воспринимают сжимающих усилий),

$$b_j(\lambda) > b_j(\zeta) \quad \text{при } \lambda > \zeta \ge 1, \tag{3}$$

существуют постоянные $c_0,\ c_1,\ k > 0$ такие, что при $\lambda \ge 0$ для $j = 1,2$

$$\rho_j \in C(\overline{\Omega}), \tag{4}$$

$$\rho_j(\alpha) \ge c_0 > 0 \quad \forall\, \alpha \in \overline{\Omega}. \tag{5}$$

$$k\,\zeta - c_1 \le b_j(\zeta) \le k\,\zeta. \tag{6}$$

Заметим, что, вообще говоря, направления r_j не являются главными для тензора T, хотя смешанные компоненты T^{jm} $(j \ne m)$ и равны нулю.

Уравнение равновесия оболочки, находящейся под воздействием внешних сил, в декартовой системе координат имеет следующий вид (см. [6, с. 88]):

$$\sum_{j=1}^{2} \partial_j \left(\frac{b_j\,(|\partial_j w|/g_j)}{|\partial_j\, w|}\ \ \rho_j\ g_{j^*}\ \partial_j\, w \right) + \sqrt{G}\,P + \sqrt{G}\,\gamma\, Q = 0\,, \tag{7}$$

где P, Q – вектора плотности поверхностной и массовой нагрузок соответственно, γ – плотность материала оболочки в деформированном состоянии.

В силу закона сохранения массы $\sqrt{G}\gamma = \big|\,[\partial_1\xi(\alpha), \partial_2\xi(\alpha)]\,\big|\ \mathring{\gamma}$, где $\mathring{\gamma}\colon \Omega \to R^1$ – заданная плотность материала недеформированной оболочки. Будем считать, что плотность материала равна единице ($\mathring{\gamma} = 1$) и $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Поверхностная нагрузка предполагается равной нулю: $P = 0$. Поэтому в силу того, что $\big|\,[\partial_1\xi, \partial_2\xi]\,\big| = 1$, $g_1 = g_2 = 1$, уравнение (7) примет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{2} \partial_j \left(\frac{b_j(|\partial_j\, w|)}{|\partial_j\, w|}\ \partial_j w \right) + Q = 0\,, \tag{8}$$

Далее будем считать края оболочки закрепленными:

$$w(\alpha_1, \alpha_2)\Big|_{\Gamma} = \xi(\alpha_1, \alpha_2)\Big|_{\Gamma}\,. \tag{9}$$

Приведем вариационную постановку задачи (8), (9) в перемещениях: искомой будет вектор-функция $v = w - \xi$ такая, что

$$\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{b_j\,(|\partial_j(v+\xi)|)}{|\partial_j(v+\xi)|}\ \partial_j(v+\xi), \partial_j\eta \right) d\alpha -$$

$$- \int\limits_{\Omega} (Q(\alpha), \eta(\alpha))\, d\alpha = 0 \quad \forall\, \eta \in [C_0^\infty(\Omega)]^3. \quad (10)$$

Предполагаем, что массовая нагрузка, действующая на оболочку, сосредоточена во внутренней точке α^* множества Ω и имеет интенсивность $q = (q_1, q_2, q_3)$, $q_1 = \mathrm{const}$, $q_2 = \mathrm{const}$, $q_3 = \mathrm{const}$.

Наряду с приведенной выше задачей, рассмотрим семейство задач с массовыми нагрузками Q_ε, $\varepsilon \to +0$,

$$Q_\varepsilon:\ \Omega \to R^3:\ Q_\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \notin S_\varepsilon, \\ \dfrac{1}{\mathrm{mes}\,(\mathrm{S}_\varepsilon)}\, q, & \alpha \in S_\varepsilon. \end{cases}$$

где $S_\varepsilon = \{\, \alpha \in \Omega : |\alpha - \alpha^*| \le \varepsilon \,\}$.

Для произвольной функции $\eta \in \Big[C_1(\overline{\Omega}) \Big]^3$ имеем:

$$\int\limits_{\Omega} (Q_\varepsilon(\alpha), \eta(\alpha))\ d\alpha = \int\limits_{S_\varepsilon} (Q_\varepsilon(\alpha), \eta(\alpha))\ d\alpha = \frac{1}{\mathrm{mes}\,(S_\varepsilon)} \int\limits_{S_\varepsilon} (\,q, \eta(\alpha))\ d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{mes}\,(S_\varepsilon)}\ (q, \eta(\alpha)) \,\Bigg|_{\alpha=\alpha'_\varepsilon \in S_\varepsilon} \mathrm{mes}\,(S_\varepsilon) = (q, \eta(\alpha'_\varepsilon))\,.$$

Устремляя ε к нулю, получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Omega} (Q_\varepsilon(\alpha), \eta(\alpha))\ d\alpha = (q, \eta(\alpha^*)) = \int\limits_{\Omega} (\, B(\alpha - \alpha^*), \eta(\alpha))\ d\alpha,$$

где $B(\alpha) = (q_1\, \delta(\alpha), q_2\, \delta(\alpha), q_3\, \delta(\alpha))$, δ – дельта функция Дирака:

$$\int\limits_{\Omega} \delta(\alpha)\, p(\alpha)\, d\alpha = p(0) \quad \forall\, p \in C_0^\infty(\Omega).$$

Используя введенные обозначения, массовую нагрузку Q, сосредоточенную во внутренней точке α^*, интенсивности q запишем в виде: $Q(\alpha) = B(\alpha - \alpha^*)$.

Приведем обобщенную формулировку рассматриваемой задачи. Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|\eta\| \equiv \|\partial_1 \eta\|_{L_1} + \|\partial_2 \eta\|_{L_1}\,.$$

Под обобщенным решением задачи (10) будем понимать функцию $v \in \Big[\, \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega) \Big]^3$ такую, что

$$\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{b_j(|\partial_j(\xi+v)|)}{|\partial_j(\xi+v)|}\ \partial_j(\xi+v), \partial_j\eta \right)\ d\alpha = (q, \eta(\alpha^*)) \quad \forall\, \eta \in \Big[C_0^\infty(\Omega) \Big]^3. \quad (11)$$

2. Существование решения

Определим пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|\zeta\| \equiv \|\partial_1\zeta\|_{L_2} + \|\partial_2\zeta\|_{L_2}, \quad \text{где} \quad \left\|\partial_j\zeta\right\|_{L_2}^2 = \int\limits_\Omega |\partial_j\zeta|^2\, d\alpha, \quad j = 1,2,$$

и обозначим $V = \left[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right]^3$.

Рассмотрим вспомогательную задачу поиска функции $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ такой, что

$$\begin{cases} -k\,\triangle\phi_i = q_i\delta(\alpha - \alpha^*), & \alpha \in \Omega, \\ \phi_i(\alpha) = 0, & \alpha \in \Gamma, \end{cases} \qquad i = 1,2,3. \tag{12}$$

Здесь k – постоянная из условия (6).

Решение задачи (12) существует и $\phi_i \in \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)$ для каждого $i = 1,2,3$ (см. например [8, с. 163]). Поэтому $\phi \in \left[\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)\right]^3$.

Вариационная постановка задачи (12) выглядит следующим образом:

$$\text{Найти } \phi: \quad k\sum_{j=1}^2 \int\limits_\Omega (\partial_j\phi, \partial_j\eta)\, d\alpha = (q, \eta(\alpha^*)) \quad \forall\, \eta \in \left[C_0^\infty(\Omega)\right]^3. \tag{13}$$

Решение задачи (11) будем искать в виде $v = u + \phi$, где $u \in V$ – неизвестная функция, а ϕ – решение задачи (13). Введем далее в рассмотрение операторы $\Lambda_j : V \to \left[L_2(\Omega)\right]^3$, $B_j : R^3 \to R^3$, $j = 1,2$, по формулам:

$$\Lambda_j(u) = \partial_j(\xi + u + \phi), \quad u \in V, \tag{14}$$

$$B_j(y) = \begin{cases} \dfrac{b_j(|y|)}{|y|}\, y, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Отметим, что $B_j\left(\Lambda_j(u)(\alpha)\right)$, $\alpha \in \Omega$, $j = 1,2$, – усилия в точках нити.

С учетом (13)–(15) задача (11) сводится к поиску функции $u \in V$ такой, что

$$\sum_{j=1}^2 \int\limits_\Omega (B_j(\Lambda_j(u)), \partial_j\eta)\, d\alpha = k\sum_{j=1}^2 \int\limits_\Omega (\partial_j\phi, \partial_j\eta)\, d\alpha \quad \forall\, \eta \in \left[C_0^\infty(\Omega)\right]^3. \tag{16}$$

В силу (16) для произвольной функции η из $\left[C_0^\infty(\Omega)\right]^3$

$$0 = \sum_{j=1}^2 \Big(\int\limits_\Omega \big(\, B_j(\Lambda_j(u)), \partial_j\eta \,\big) d\alpha - k\int\limits_\Omega (\partial_j\phi, \partial_j\eta) d\alpha \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^2 \Big(\int\limits_\Omega (\, B_j(\Lambda_j(u)), \partial_j\,\eta)\, d\alpha - k\int\limits_\Omega (\partial_j(\xi + u + \phi), \partial_j\eta)\, d\alpha + k\int\limits_\Omega (\partial_j(\xi + u), \partial_j\eta)\, d\alpha \Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\Big(\int\limits_{\Omega} \Big(\Big[b_j(|\Lambda_j(u)|) - k\,|\Lambda_j(u)|\Big]\, \frac{\Lambda_j(u)}{|\Lambda_j(u)|}, \partial_j\eta\Big) d\alpha + k \int\limits_{\Omega} (\partial_j(\xi+u), \partial_j\eta)\, d\alpha\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \Big(\Big[b_j(|\Lambda_j(u)|) - k\,|\Lambda_j(u)|\Big]\, \frac{\Lambda_j(u)}{|\Lambda_j(u)|}, \partial_j\eta\Big) d\alpha + k\,(\xi+u,\eta)_V,$$

то есть задача (16) запишется в виде:

$$a_1(u,\eta) + a_2(u,\eta) + k\,(\xi+u,\eta)_V = 0 \quad \forall\,\eta \in \Big[C_0^\infty(\Omega)\Big]^3,$$

где формы $a_j : V\times V \to R^1$, $j=1,2$, определены соотношениями:

$$a_j(u,\eta) = \int\limits_{\Omega} \Big(\Big[b_j(|\Lambda_j(u)|) - k\,|\Lambda_j(u)|\Big]\, \frac{\Lambda_j(u)}{|\Lambda_j(u)|}, \partial_j\eta\Big)\, d\alpha =$$

$$\int\limits_{\Omega} \Big[\, \frac{b_j\,(|\Lambda_j(u)|)}{|\Lambda_j(u)|} - k\,\Big]\, \Big(\Lambda_j(u), \partial_j\eta\Big)\, d\alpha.$$

Из (6) имеем, что

$$-c_1 = k\,|\Lambda_j(u)| - c_1 - k\,|\Lambda_j(u)| \le b_j\,(|\Lambda_j(u)|) - k\,|\Lambda_j(u)| \le 0,$$

а значит,

$$\Big|\, b_j(|\Lambda_j(u)|) - k\,|\Lambda_j(u)|\Big| \le c_1 \quad j=1,2.$$

Поэтому

$$|a_j(u,\eta)| \le c_1 \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|\Lambda_j(u)|}\,\Big|\Big(\Lambda_j(u), \partial_j\,\eta\Big)\Big|\, d\alpha \le c_1 \int\limits_{\Omega} \big|\,\partial_j\,\eta\big|\, d\alpha \le c_1^*\,\|\eta\|, \qquad (17)$$

где $c_1^* = c_1\,(\operatorname{mes}\Omega)^{1/2}$.

Определим форму $a : V\times V \to R^1$ по формуле

$$a(u,v) = a_1(u,\eta) + a_2(u,\eta) + k\,(\xi+u,\eta)_V\,.$$

Очевидно, что эта форма линейна по второму аргументу, из неравенств (17) вытекает, что она непрерывна по второму аргументу. Поэтому в силу теоремы Рисса–Фишера форма a порождает оператор $A : V \to V$,

$$(Au,\eta)_V = a(u,\eta) \quad \forall\,u,\eta\in V. \qquad (18)$$

Из оценки (17) получаем, что

$$|a(u,\eta)| \le 2\,c_1^*\,\|\eta\| + k\,(\|\xi\| + \|u\|\,)\,\|\eta\|,$$

следовательно,

$$\|Au\| \le k\,\|u\| + k\,\|\xi\| + 2\,c_1^*,$$

и, таким образом, оператор A является ограниченным.

С учетом введенных обозначений обобщенная задача (16) эквивалентна вариационному уравнению:

$$\text{Найти } u\in V: \quad (Au,\eta)_V = 0 \quad \forall\,\eta\in V. \qquad (19)$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (1)–(6). *Тогда оператор* A *ограничен, непрерывен, монотонен, и выполняется неравенство:*

$$(Au, u)_V \geq k\,\|u\|^2 - c^*\,\|u\| \quad \forall\, u \in V. \tag{20}$$

Доказательство. Ограниченность оператора A установлена выше. Непрерывность оператора A следует из непрерывности из условий (1), (2), (6) на функции b_j и свойств оператора Немыцкого (см. [9, с. 213]).

Докажем монотонность оператора A.

$$(Au - A\eta, u-\eta)_V = (Au,u)_V - (Au,\eta)_V - (A\eta,u)_V + (A\eta,\eta)_V =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left[\frac{b_j\left(\Lambda_j(u)|\right)}{|\Lambda_j(u)|} - k \right] \big(\Lambda_j(u), \partial_j\, u\big)\, d\alpha + k\,(u,u)_V + k\,(\xi,u)_V -$$

$$- \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left[\frac{b_j\left(|\Lambda_j(u)|\right)}{|\Lambda_j(u)|} - k \right] \big(\Lambda_j(u), \partial_j\, \eta\big)\, d\alpha - k\,(u,\eta)_V - k\,(\xi,\eta)_V -$$

$$- \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left[\frac{b_j\left(\Lambda_j(\eta)|\right)}{|\Lambda_j(\eta)|} - k \right] \big(\Lambda_j(\eta), \partial_j\, u\big)\, d\alpha - k\,(\eta,u)_V - k\,(\xi,u)_V +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left[\frac{b_j\left(|\Lambda_j(\eta)|\right)}{|\Lambda_j(\eta)|} - k \right] \big(\Lambda_j(\eta), \partial_j\, \eta\big)\, d\alpha + k\,(\eta,\eta)_V + k\,(\xi,\eta)_V =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left\{ \frac{b_j\left(|\Lambda_j(u)|\right)}{|\Lambda_j(u)|} \big(\Lambda_j(u), \partial_j\,(u-\eta)\big) - k\,\big(\Lambda_j(u), \partial_j\,(u-\eta)\big) - \right.$$

$$\left. - \frac{b_j\left(|\Lambda_j(\eta)|\right)}{|\Lambda_j(\eta)|} \big(\Lambda_j(u), \partial_j\,(u-\eta)\big) + k\,\big(\Lambda_j(u), \partial_j\,(u-\eta)\big) \right\} d\alpha +$$

$$+ k\,(u,u)_V - k\,(u,\eta)_V - k\,(\eta,u)_V + k\,(\eta,\eta)_V =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{b_j\left(\Lambda_j(u)|\right)}{|\Lambda_j(u)|}\,\Lambda_j(u) - \frac{b_j\left(|\Lambda_j(\eta)|\right)}{|\Lambda_j(\eta)|}\,\Lambda_j(\eta), \partial_j\,(u-\eta)\Big)\, d\alpha =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \big(B_j(\Lambda_j(u)) - B_j(\Lambda_j(\eta)),\ \Lambda_j(u) - \Lambda_j(\eta)\,\big)\, d\alpha.$$

Для произвольных векторов z, y из R^3 и $j = 1, 2$ имеем:

$$(B_j\,(z) - B_j\,(y)\,,\, z-y) =$$

$$= b_j\,(|z|)\,|z| - b_j\,(|z|)\,\frac{(z,y)}{|z|} - b_j\,(|y|)\,\frac{(z,y)}{|y|} + b_j\,(|y|)\,|y| \geq$$

$$\geq b_j\,(|z|)\,|z| - b_j(|z|)\,|y| - b_j\,(|y|)\,|z| + b_j\,(|y|)\,|y| =$$

$$= \big[\,(b_j\,(|z|) - b_j(|y|)\,\big]\,(|z| - |y|).$$

Поскольку в силу условий (2), (3) функции b_j не убывают, то

$$(b_j(\zeta) - b_j(\mu))\,(\zeta - \mu) \geq 0, \quad \forall\, \zeta, \mu \geq 0.$$

Таким образом, выполнены неравенства

$$(B_j(z) - B_j(y),\, z - y) \geq 0 \quad \forall\, z, y \in R^3, \quad j = 1, 2. \tag{21}$$

Воспользовавшись соотношениями (14), (15) и неравенствами (21), для произвольных функций u, v из V получаем неравенство:

$$(Au - A\eta, u - \eta)_V =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} (B_j(\Lambda_j(u)) - B_j(\Lambda_j(\eta)),\, \Lambda_j(u) - \Lambda_j(\eta))\, d\alpha \geq 0,$$

то есть A – монотонный оператор.

Установим справедливость неравенства (20). По определению

$$(Au, u)_V = a(u, u) = a_1(u, u) + a_2(u, u) + k\,(\xi + u, u)_V \geq$$

$$\geq -|\, a_1(u, u)\,| - |\, a_2(u, u)\,| - k\,|\,(\xi, u,)_V\,| + k\,\|u\|^2.$$

Из оценок (17) вытекает, что

$$(Au, u)_V \geq -(2\, c_1^* + \|\xi\|)\, \|u\| + k\, \|u\|^2,$$

откуда и следует неравенство (20). □

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1)–(6). *Тогда:*

1) *Множество решений задачи* (16) *непусто, выпукло и замкнуто.*

2) *Если v – решение задачи* (11), *то $v = u + \phi$, где u является решением задачи* (16), *а ϕ – решение задачи* (13).

Доказательство. Из (19) в силу определения оператора A в виде (18) следует, что задача (16) эквивалентна операторному уравнению

$$Au = 0. \tag{22}$$

В силу леммы 1 оператор A является монотонным и непрерывным. Из неравенства (20) следует коэрцитивность этого оператора. Поэтому непустота, выпуклость и замкнутость множества решений уравнения (22), а значит, и задачи (16), вытекает из теоремы 2.1 [3, с. 95].

Пусть v – решение задачи (11), ϕ – решение задачи (13). Положим $u = v - \phi$. В силу (11), (13) для произвольной функции $\eta \in \left[C_0^\infty(\Omega)\right]^3$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} (\, B_j(\Lambda_j(v - \phi))\partial_j(\xi + (v - \phi) + \phi), \partial_j\eta)\; d\alpha =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{b_j(|\partial_j(\xi + v)|)}{|\partial_j(\xi + v)|}\; \partial_j(\xi + v), \partial_j\eta \right) d\alpha =$$

$$(q, \eta(\alpha^*)) = k \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} (\partial_j\phi, \partial_j\eta)\, d\alpha,$$

то есть u является решением задачи (16) □

Отметим, что, вообще говоря, решение задачи (16) не единственно. Однако справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (2), (6) *и, кроме того,*

$$|\, b_j(\lambda) - b_j(\zeta)\,| \le L_j\,|\,\lambda - \zeta\,|, \quad L_j > 0, \quad j = 1,2, \quad \forall\,\lambda,\zeta \ge 0. \tag{23}$$

Если u *– решение задачи* (16), ϕ *– решение задачи* (13), *то усилия в нитях*

$$B_j\left(\Lambda_j\left(u\right)\right) = \begin{cases} \dfrac{b_j\left(|\Lambda_j\left(u\right)|\right)}{|\Lambda_j\left(u\right)|}\,\Lambda_j\left(u\right), & |\Lambda_j\left(u\right)| \ne 0, \\ 0, & |\Lambda_j\left(u\right)| = 0 \end{cases}, \quad j = 1,2,$$

определяются единственным образом.

Доказательство. Пусть, наряду с u, функция u^* также является решением задачи (16), то есть $Au = Au^* = 0$. В [10] доказано, что при выполнении условий (2), (6), (23) справедливы так называемые неравенства подчинения

$$|\, B_j\left(y\right) - B_j\left(z\right)|^2 \le L_j\left(\, B_j\left(y\right) - B_j\left(z\right), y - z\,\right) \quad \forall\, y,z \in R^3.$$

Поэтому

$$0 = \left(Au - Au^*, u - u^*\right)_V = \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \left(B_j\left(\Lambda_j\left(u\right)\right) - B_j\left(\Lambda_j\left(u^*\right)\right),\, \Lambda_j\left(u\right) - \Lambda_j\left(u^*\right)\right) d\alpha \ge$$

$$\ge \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{L_j} \int\limits_{\Omega} \left|\, B_j\left(\Lambda_j(u)\right) - B_j\left(\Lambda_j(u^*)\right)\right|^2 d\alpha,$$

а значит, $B_j\left(\Lambda_j(u)\right) = B_j\left(\Lambda_j(u^*)\right)$, $j = 1,2$. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 08-01-00676, 09-01-00814, 10-01-00728).

Summary

I.B. Badriev, V.V. Banderov, O.A. Zadvornov. Existence of Solution of the Equilibrium Soft Network Shell Problem in the Presence of a Point Load.

A spatial equilibrium soft network shell problem in the presence of a point source is considered. We assume that the functions specifying the physical relations in the threads forming the shell are continuous, non-decreasing and have linear growth at infinity. The generalized problem in the form of integral identity is formulated. The existence theorem is proved. **Key words:** soft network shell, point source, monotone operator, existence theorem.

Литература

1. *Бадриев И.Б., Задворнов О.А.* Исследование разрешимости стационарных задач для сетчатых оболочек // Изв. вузов. Матем. – 1992. – № 11. – С. 3–7.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

3. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.

4. *Задворнов О.А.* Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Изв. вузов. Матем. – 2005. – № 1. – С. 58–63.

5. *Задворнов О.А.* Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 1. – С. 155–163.

6. *Ридель В.В., Гулин Б.В.* Динамика мягких оболочек. – М.: Наука, 1990. – 206 с.

7. *Бидерман В.Л., Бухин Б.Л.* Уравнения равновесия безмоментной сетчатой оболочки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1966. – № 1. – С. 81–89.

8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 348 с.

9. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: Гостехиздат, 1956. – 344 с.

10. *Глушенков В.Д.* Об одном уравнении нелинейной теории фильтрации // Прикладная математика в научно-технических задачах. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1976. – С. 12–21.

Поступила в редакцию
26.01.10

Бадриев Ильдар Бурханович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.
E-mail: *Ildar.Badriev@ksu.ru*

Бандеров Виктор Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономической кибернетики Казанского государственного университета.
E-mail: *Victor.Banderov@ksu.ru*

Задворнов Олег Анатольевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.
E-mail: *Oleg.Zadvornov@ksu.ru*